Jerzy Słupecki, Ludwik Borkowski [1984]. *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*. Warszawa: PWN (bądź dowolne inne wydanie).

$$(*) \quad \alpha_1 \to (\alpha_2 \to \ldots (\alpha_{n-1} \to \alpha_n) \ldots)$$

Reguły pierwotne tworzenia dowodów:

- *Założeniowy dowód wprost* formuły $(*)$ tworzymy:
  1. w $n-1$ pierwszych wierszach wypisując kolejno formuły $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ jako założenia;
  2. dołączając do dowodu jako nowe wiersze:
     (a) tezy uprzednio udowodnione,
     (b) formuły wyprowadzone z formuł wcześniejszych na mocy reguł inferencyjnych;
  3. kończąc dowód, jeśli w ostatnim wierszu występuje formuła α_n.

- *Założeniowy dowód niewprost* formuły $(*)$ tworzymy:
  1. wypisując:
     (a) w $n-1$ pierwszych wierszach kolejno formuły $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{n-1}$ jako założenia;
     (b) w n-tym wierszu formułę $\neg\alpha_n$ jako założenie dowodu niewprost
  2. dołączając do dowodu jako nowe wiersze:
     (a) tezy uprzednio udowodnione,
     (b) formuły wyprowadzone z formuł wcześniejszych na mocy reguł inferencyjnych;
  3. kończąc dowód, jeśli występują w nim dwa wiersze sprzeczne.

Reguły wtórne tworzenia dowodów:

- *Reguła dołączania implikacji.*
  1. W założeniowym dowodzie formuły $(*)$ możemy wprowadzić dowolną formułę β jako dodatkowe założenie dowodu.
  2. Jeśli na podstawie tego dodatkowego założenia i założeń dowodu otrzymamy formułę γ, to do dowodu możemy dołączyć formułę $\beta \to \gamma$.

- *Reguła dołączania formuły sprzecznej z dodatkowym założeniem dowodu*: jeśli na podstawie dodatkowego założenia β otrzymamy w dowodzie dwie formuły sprzeczne, to do dowodu możemy dołączyć formułę $\neg\beta$.

- *Reguła tworzenia dowodów rozgałęzionych z dołączeniem dodatkowych założeń.*
  1. Założeniowy dowód wprost formuły $(*)$ jest zakończony jeśli uzyskamy w nim formułę α_n na podstawie każdego z dodatkowych założeń $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$, których alternatywa jest jednym z wierszy dowodu;
  2. Założeniowy dowód niewprost formuły $(*)$ jest zakończony jeśli uzyskamy w nim sprzeczność na podstawie każdego z dodatkowych założeń $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$, których alternatywa jest jednym z wierszy dowodu;

Pierwotne reguły inferencyjne:

$RO \quad \dfrac{\alpha \to \beta, \alpha}{\beta}$

$DK \quad \dfrac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta} \qquad OK \quad \dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha, \beta}$

$DA \quad \dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta} \quad \dfrac{\beta}{\alpha \vee \beta} \qquad OA \quad \dfrac{\alpha \vee \beta, \neg\alpha}{\beta} \quad \dfrac{\alpha \vee \beta, \neg\beta}{\alpha}$

$DE \quad \dfrac{\alpha \to \beta, \beta \to \alpha}{\alpha \leftrightarrow \beta} \qquad OE \quad \dfrac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\alpha \to \beta} \quad \dfrac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\beta \to \alpha}$

Udowodnij następujące prawa klasycznego rachunku zdań:

1. $p \wedge (q \to r) \to (p \wedge q \to r)$
2. $p \wedge (q \to r) \to (q \to p \wedge r)$
3. $(p \leftrightarrow g) \wedge \neg p \to \neg q$
4. $(p \leftrightarrow g) \wedge \neg q \to \neg p$
5. $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$
6. $\neg(p \wedge \neg p)$
7. $(p \to q) \to (r \wedge p \to r \wedge q)$
8. $(p \to q) \to ((r \to s) \to (p \wedge r \to q \wedge s))$
9. $p \wedge (q \wedge r) \to (p \wedge q) \wedge r$
10. $p \vee (q \vee r) \to (p \vee q) \vee r$
11. $(p \to q) \to (p \vee r \to q \vee r)$
12. $(p \to q) \to ((r \to s) \to (p \vee r \to q \vee s))$
13. $(p \to r) \wedge (q \to r) \to (p \vee q \to r)$
14. $(p \vee q \to r) \to (p \to r) \vee (q \to r)$
15. $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$